Fundamentales Abzählprinzip:

Gibt es für k nacheinander fällige Entscheidungen E_i ($i = 1, ..., k$) jeweils n_i Auswahlmöglichkeiten A_{ij} ($j = 1, ..., n_i$), und sind die Anzahlen n_i unabhängig von den vorangegangenen Entscheidungen, so ist die Gesamtzahl n der dadurch möglichen, unterschiedlichen Ergebnisse gleich dem Produkt aller Werte n_i:

$$\boxed{n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$$

Beweis: Wenn es für jede Ausgangssituation (Anzahl x) dieselbe Anzahl (y) von Fortsetzungen gibt, so erhält man insgesamt $x \cdot y$ Kombinationen von Ausgangssituationen und Fortsetzungsmöglichkeiten.

Bemerkungen:

- Es ist belanglos, ob die Entscheidungen geplant getroffen werden oder zufällig fallen.

  geplant: Tippen beim Sporttoto

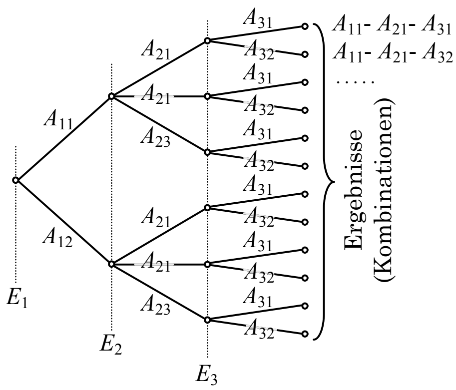
  zufällig: Ziehen eines Loses

- Die nachfolgenden Auswahlmöglichkeiten können durchaus von den vorangegangenen Entscheidungen abhängen, ihre Anzahl darf sich dabei nicht ändern!

  Wird ein Los bei der ersten Ziehung gezogen, so steht es für die nächste Ziehung nicht mehr zur Verfügung. Die Auswahlmöglichkeit ist von den verbleibenden Losen abhängig, nicht jedoch deren Anzahl.

- Eine einfache Möglichkeit, sich eine Folge von Auswahlvorgängen zu veranschaulichen, ist das *Baumdiagramm* (*Entscheidungsbaum*): Jede Verzweigungsebene (Knotenebene) stellt eine fällige Wahlentscheidung E_i, jeder Zweig eine Auswahlmöglichkeit A_{ij} dar. Jeder Endpunkt repräsentiert ein mögliches (End-) Ergebnis des Auswahlprozesses.

  Baumdiagramme sind besonders dann hilfreich, wenn bei Entscheidungsabfolgen die Anzahl der nächsten Möglichkeiten von der bereits getroffenen Auswahl beeinflusst wird und daher das fundamentale Auswahlprinzip nur begrenzt anwendbar ist.

  Die Anzahl der Ergebnisse liefert das Abzählprinzip: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

- Ein für statistische und wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen wichtiger Entscheidungsablauf ist die *k-malige Auswahl aus n verschiedenen „Objekten"*; wir unterscheiden:

  Objekte sind nicht nur Gegenstände (Dinge), es können auch Tätigkeiten (z. B. Messen) usw. sein.

  Beispiele:

  - Beachtung der Reihenfolge: *geordnete Stichprobe* (auch als *Variation k-ter Ordnung von n Elementen* bezeichnet)

    Preisvergabe bei einem Gewinnspiel

  - Die Reihenfolge ist egal: *ungeordnete Stichprobe* (*Kombination k-ter Ordnung von n Elementen*)

    Abpacken von je 3 T-Shirts verschiedener Farbe

  - Jedes Objekt kann nur maximal einmal gewählt werden: *Auswahl ohne Wiederholungen*

    Austeilen von Spielkarten („*Ziehen ohne Zurücklegen*")

  - Jedes Objekt kann beliebig oft (maximal k-mal) gewählt werden: *Auswahl mit Wiederholungen*

    Dreimaliges Würfeln („*Ziehen mit Zurücklegen*")

Anzahl der Ergebnisse bei wichtigen Auswahlverfahren:
(Im Folgenden werden aus n unterscheidbaren Elementen k Elemente ausgewählt.)

Die Beweise folgen aus dem fundamentalen Abzählprinzip.

- Die Anzahl aller möglichen *geordneten Stichproben ohne Wiederholungen* ($k \le n$) ist gleich

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Bemerkung: Für $k = n$ liegt eine *Permutation n-ter Ordnung* vor („Verteilung von n Dingen auf n Plätzen"); die Anzahl aller möglichen Permutationen n-ter Ordnung ist gleich

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Beispiel: Acht Läufer stehen im Finale des olympischen 100m-Laufs. Auf wie viele Arten könnte die Vergabe der Medaillen erfolgen, wenn Zeitgleichheit ausgeschlossen wird?

Von 8 Läufern erhalten 3 (Auswahl) eine Medaille (die Reihenfolge ist zu beachten!):

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336 \text{ Arten}$$

Fortsetzung: Wie viele verschiedene Zieleinläufe sind möglich (alle Läufer erreichen das Ziel)?

$8! = 40320$ Einläufe

- Die Anzahl aller möglichen *geordneten Stichproben mit Wiederholungen* (k beliebig) ist gleich

$$\boxed{\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ Faktoren}} = n^k}$$

Beispiel: Wie viele (verschiedene) 3-stellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 4, 5, 7 und 9 bilden?

$5^3 = 125$ Zahlen

- Die Anzahl aller möglichen *ungeordneten Stichproben ohne Wiederholungen* ($k \le n$) ist gleich

$$\boxed{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{\underbrace{k!}_{\substack{\text{innerhalb einer geordneten Stichprobe}\\ \text{sind die } k \text{ Elemente auf } k \text{ Plätze verteilt.}}}} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

Beispiel: Eine Klasse (27 Schüler) soll für ein Turnier eine Volleyball-Mannschaft (6 Spieler) stellen. Wie viele Mannschaften sind denkbar?

$$\binom{27}{6} = 296010 \text{ Mannschaften}$$

- Die Anzahl aller möglichen *ungeordneten Stichproben mit Wiederholungen* (k beliebig) ist gleich

$$\boxed{\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}}$$

Beweis: Ein mit einer Zentimeterteilung versehenes Lineal der Länge $(n+k)$cm besitzt $n+k-1$ innenliegende Markierungen. Durch eine ungeordnete Auswahl von $n-1$ dieser Markierungen unterteilt man das Lineal der Reihe nach in n (nummerierbare) Teilstücke mit insgesamt k nicht benutzten Teilungsstrichen. Fasst man die n Teilstücke als die n Dinge auf, aus denen k-mal gewählt werden kann, so stehen die ungenutzten Markierungen jedes Stücks dafür, wie oft das entsprechende Objekt gewählt wird. Daraus folgt obige Formel.

Beispiel: 4 Personen sitzen rund um einen Tisch und würfeln der Reihe nach mit einem Würfel. Die geworfenen Augen werden fortlaufend addiert, und derjenige Spieler, der mit seinem Wurf die 100-Punkte-Marke übertrifft, gewinnt und erhält einen Punkt. Wie viele verschiedene Endergebnisse bezüglich der Aufteilung der Gewinnpunkte sind bei 10 Spielen möglich?

$$\binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} = 286 \text{ Ergebnisse}$$

Bemerkung: Bildet man die Permutationen von n Elementen, die nicht alle verschieden, sondern in k Gruppen zu je n_i gleichen Elementen eingeteilt sind, so ergibt sich die Anzahl aller möglichen verschiedenen Permutationen mit der Formel

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}}$$

Beispiel: Die 4 Buben und 2 Mädchen eines Volleyballteams stellen sich in einer Reihe auf. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn

a) keine Einschränkung besteht,

b) nach dem Geschlecht unterschieden wird?

zu **a)**: $6! = 720$ Möglichkeiten

zu **b)**: $\frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$ Aufstellungen

Einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten:
Im Folgenden sei $0 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

a) $$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$$

(Diese Eigenschaft führt zum PASCAL'schen Dreieck.)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = \frac{n!\cdot((k+1)+(n-k))}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(k+1)!\cdot((n+1)-(k+1))!}$$

b) $$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n}$$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot 1^k$$

c) $$\boxed{\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}}$$ für $n \le m$

$$(1+a)^n \cdot (1+a)^m = (1+a)^{n+m}$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot a^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\cdot a^j\right)}_{\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i}\right)\cdot a^k} = \sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}\cdot a^k$$

(mit $i + j = k$)

d) $$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k} \underset{\text{c)}}{=} \binom{n+n}{n}$$