Gebräuchliche Bezeichnungen:	
• *Zufallsexperiment* (Zufallsbeobachtung): ein (zumindest theoretisch) beliebig oft wiederholbarer Vorgang, bei dem mehrere verschiedene Ausgänge möglich sind, deren Eintreten jedoch *zufällig* erfolgt *zufällig*: nicht vorhersehbar	**a)** Werfen einer Münze **b)** Würfeln mit zwei Würfeln **c)** Ermitteln der Lebensdauer einer Glühbirne
• *Ergebnis* eines Zufallsexperiment: jeder mögliche Ausgang (jede Realisierung) bei einem Zufallsversuch	**a)** Zahl (**Z**) oder Wappen (**W**) **b)** z. B. das Augenzahlenpaar $1-3$, kurz $(1;3)$ **c)** x Stunden, $x \in \mathbb{R}_0^+$
• *Ergebnismenge*, *Sicheres Ereignis* S: die Zusammenfassung aller möglichen Ergebnisse (Ausgänge, Realisierungen) eines Zufallsexperiments Bemerkung: Eine mathematische Beschreibung von Zufallserscheinungen ist in verschiedener Form möglich. Bewährt und übersichtlich ist die Mengenschreibweise, die wir daher unseren Überlegungen zugrunde legen wollen.	**a)** $S = \{\mathbf{Z}; \mathbf{W}\}$ **b)** $S = \{(1;1); (1;2); (1;3); \ldots; (6;6)\}$ **c)** $S = \mathbb{R}_0^+$
• *Ereignis* E: eine beliebige Teilmenge der Ergebnismenge S Ein Ereignis tritt ein, wenn eines der Ergebnisse, die E bilden, beobachtet wird. Besteht ein Ereignis nur aus einem einzigen Ergebnis, so nennt man es *Elementarereignis*. Bemerkungen: - Korrekterweise müsste zwischen einem Ereignis (Realität) und der *Ereignismenge* (mathematisches Modell) unterschieden werden. Da eine Verwechslung nicht zu befürchten ist, verzichtet man auf eine Unterscheidung. - Zu unterscheiden sind aber Ergebnisse (Elemente einer Menge) und Ereignisse (Teilmengen).	Bemerkung: Wir bezeichnen Ereignisse mit Großbuchstaben. **a)** A: „Der Münzwurf ergibt ‚Zahl'“, $A = \{\mathbf{Z}\}$ **b)** B: „Werfen eines „Pasch“ mit geraden Augenzahlen“, $B = \{(2;2); (4;4); (6;6)\}$ **c)** C: „Lebensdauer von höchstens 1000 Stunden“, $C = [0; 1000]$
• Das *unmögliche Ereignis* U beinhaltet kein Ergebnis des Zufallsversuchs, es ist keine Realisierung möglich: $U = \{\}$.	z. B.: „Die Summe der Augen zweier Würfel soll durch 3 und 5 teilbar sein“ ist ein unmögliches Ereignis.
Das *Gegenereignis* $\overline{E}$ (*komplementäres* Ereignis) tritt genau dann ein, wenn das Ereignis E nicht eintritt; die Menge $\overline{E}$ ist also die Komplementärmenge von E bzgl. S: $\overline{E} := S \setminus E$	**a)** $\overline{A} = \{\mathbf{W}\}$ **c)** $\overline{C} =]1000; \infty[$
• *Unvereinbare* (*einander ausschließende*) *Ereignisse*: das Eintreten des einen Ereignisses schließt das Eintreffen des anderen aus: $E_1 \cap E_2 = \{\}$ Bemerkung: Unvereinbare Ereignisse müssen nicht komplementär sein!	**b)** D_1: „Beide Würfel zeigen gerade Augenzahlen“ D_2: „Die Würfel zeigen ungerade Zahlen“ D_1 und D_2 schließen sich aus, sie sind aber nicht komplementär.
• Die *Wahrscheinlichkeit P*(E) *eines Ereignisses* E ist eine Zahl, die angibt, in welchem Ausmaß das Eintreten des Ereignisses E bei Durchführung des Zufallsexperiments zu erwarten sein wird.	Bei $P(E_1) < P(E_2)$ erwartet man, dass das Ereignis E_2 öfter bzw. „leichter“ eintreten wird als das Ereignis E_1.

Bemerkungen:

- Das Ereignis E: „entweder das Ereignis E_1 oder das Ereignis E_2 tritt ein“ wird beschrieben durch: $E = E_1 \cup E_2$.
- Das Ereignis E: „sowohl das Ereignis E_1 als auch das Ereignis E_2 treffen ein“ wird geschrieben als: $E = E_1 \cap E_2$.

Für $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ sagen wir kurz: „E_1 oder E_2“ bzw. „E_1 und E_2“ (treffen ein).

LAPLACE-Wahrscheinlichkeit (*Klassische Wahrscheinlichkeit*)

a) Ein LAPLACE-*Experiment* ist ein Zufallsversuch mit (nur) endlich vielen Ergebnissen, bei dem man (z. B. aus Symmetriegründen) erwartet, dass keines der Ergebnisse gegenüber den anderen bevorzugt realisiert wird: Alle möglichen Ausgänge sind *gleichwahrscheinlich*.

Würfeln mit einem „idealen“ Würfel: Dieser ist homogen und völlig symmetrisch; alle Augenzahlen sind im selben Ausmaß zu erwarten.

b) Für ein LAPLACE-Experiment definiert man als Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses E den Quotienten aus der Anzahl g der Ergebnisse, bei denen E eintritt („günstige“ Fälle), und der Anzahl m aller möglichen Ergebnisse:

$$\boxed{P(E) := \frac{g}{m}}$$

Würfeln mit einem (LAPLACE-) Würfel:

$S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, d. h., $m = 6$

E: „Werfen einer geraden Augenanzahl, die kleiner als 5 ist“, $E = \{2; 4\}$ und damit $g = 2$

$\rightarrow \quad P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Eigenschaften der LAPLACE-Wahrscheinlichkeit:

a) Die Wahrscheinlichkeit irgendeines Ereignisses E ist nicht negativ und nicht größer als eins:

$$\boxed{0 \le P(E) \le 1}$$

$0 \le g \le m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{0}{m} \le \frac{g}{m} \le \frac{m}{m}$

Im Besonderen gilt für das sichere Ereignis S und das unmögliche Ereignis U:

$$\boxed{P(S) = 1 \;\; ; \quad P(U) = 0}$$

Für S ist g gleich m, für U gleich 0.

b) Additionssatz für unvereinbare Ereignisse:

Schließen einander zwei Ereignisse E_1 und E_2 aus, so ist die Wahrscheinlichkeit von „E_1 oder E_2“ die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)} \quad \text{für } E_1 \cap E_2 = \{\}$$

Wegen $E_1 \cap E_2 = \{\}$ enthält $E_1 \cup E_2$ genau so viele Elemente wie E_1 und E_2 zusammen:

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{g_1 + g_2}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m}$

c) Für das Gegenereignis $\overline{E}$ gilt:

$$\boxed{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$$

Folgt wegen $E \cap \overline{E} = \{\}$ aus **b)**

d) Additionssatz für beliebige Ereignisse:

Die Wahrscheinlichkeit von „E_1 oder E_2“ ist die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten, vermindert um die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen von E_1 und E_2:

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)} \quad E_1, E_2 \text{ beliebig}$$

Beweis durch Aufteilung in unvereinbare Ereignisse und Anwendung von **b)**:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(\overline{E}_1 \cap E_2)$

$P(E_2) = P(E_1 \cap E_2) + P(\overline{E}_1 \cap E_2)$

Daraus eliminiert man $P(E_1 \cap E_2)$.

Unabhängige Ereignisse:

Im Folgenden seien E_1 und E_2 zwei Ereignisse mit $P(E_2) \neq 0$

a) Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von E_1 unter der Voraussetzung E_2 ist das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für das gleichzeitige Eintreten von E_1 und E_2 und des Ereignisses E_2:

$$\boxed{P(E_1 \mid E_2) := \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}}$$

Bemerkung: Die bedingte Wahrscheinlichkeit gibt also den (Wahrscheinlichkeits-) Anteil von E_2 am Eintreten von E_1 wieder d. h., sie liefert die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1, wenn bereits Näheres über den Ausgang eines Zufallsversuchs bekannt ist (das Ereignis E_2 ist schon eingetroffen) oder eine einschränkende Annahme für den Ausgang des Experiments getroffen wird (Hypothese bezüglich des Eintreffens von E_2).

Beispiel: (Einmaliges) Werfen eines Würfels; gefragt ist die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer Zwei oder Drei (Zwei oder Vier) unter der Annahme, dass der Wurf eine gerade Zahl zeigt.

E_1: „Augenzahl 2 oder 3“, $E_1 = \{2; 3\}$
E_2: „Augenzahl 2 oder 4“, $E_2 = \{2; 4\}$
E_3: „Gerade Augenzahl“, $E_3 = \{2; 4; 6\}$

$E_1 \cap E_3 = \{2\}$ und $E_2 \cap E_3 = \{2; 4\}$

$$\rightarrow \quad P(E_1 \mid E_3) = \frac{P(E_1 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$
$$P(E_2 \mid E_3) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

b) Ändert das (tatsächliche oder angenommene) Eintreten eines Ereignisses E_2 nichts an der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1, gilt also

$$\boxed{P(E_1 \mid E_2) = P(E_1)},$$

so ist E_1 (*stochastisch*) *unabhängig* von E_2. In jedem anderen Fall ist E_1 von E_2 (stochastisch) abhängig.

Beispiel: E_1 ist wegen $P(E_1) = \frac{1}{3}$ unabhängig von E_3, auf E_2 trifft dies wegen $P(E_2) = \frac{1}{3}$ nicht zu (E_2 ist von E_3 abhängig).

stochastisch: die Wahrscheinlichkeit bzw. den Zufall betreffend

Bemerkungen:

- Unabhängigkeit im Sinne von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen beinhaltet den sprachlichen Unabhängigkeitsbegriff („Ob man heute etwas isst hat keinen Einfluss darauf, ob es regnet oder schneit.“), sie beschränkt sich jedoch nicht auf diesen, sondern geht darüber hinaus: Stochastisch unabhängig ist ein Ereignis auch dann, wenn trotz einer Beeinflussung (Einschränkung der möglichen Ergebnisse!) die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen unverändert bleibt.
- Vergrößert (verkleinert) sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A durch das Eintreten von B, so *begünstigt* (*behindert*) B das Ereignis A.

Beispiel: Zweimaliges Würfeln; das Werfen einer Zwei beim 2. Wurf ist unabhängig von einer im 1. Wurf gewürfelten Zwei. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit bestätigt dies:

E_k: „Werfen einer Zwei beim k-ten von zwei Würfen“, d. h.,

$E_1 = \{(2; 1); \mathbf{(2; 2)}; ....; (2; 5); (2; 6)\}$

$E_2 = \{(1; 2); \mathbf{(2; 2)}; ....; (5; 2); (6; 2)\}$

$$\rightarrow \quad P(E_2 \mid E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$$

Satz über unabhängige Ereignisse

Für zwei Ereignisse E_1 und E_2 mit $P(E_i) \neq 0$ gilt: Ist E_1 unabhängig von E_2, so ist auch E_2 unabhängig von E_1, und die Wahrscheinlichkeit für deren gleichzeitiges Eintreten ergibt sich aus der Formel

$$\boxed{P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)}$$

(Statt „E_1 ist unabhängig von E_2“ kann man daher auch „E_1 und E_2 sind voneinander unabhängig“ sagen.)

Aus „E_1 ist unabhängig von E_2“ folgt:

$$P(E_1) = P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

und damit

$$P(E_2 \mid E_1) = ... = \frac{\cancel{P(E_1)} \cdot P(E_2)}{\cancel{P(E_1)}}$$

Wichtige Beziehungen:

a) Multiplikationssatz: Für zwei, drei oder mehr Ereignisse E_k mit $P(E_k) \neq 0$ gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) = P(E_2) \cdot P(E_1 \mid E_2) \\ P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) &= P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) \end{aligned}} \quad \text{usw.}$$

Im Folgenden sei das Sichere Ereignis S in endlich viele, paarweise unvereinbare Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$ aufgeteilt ($E_i \cap E_k = \{\}$ für alle $i \neq k$):

b) Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: Für ein beliebiges Ereignis A gilt

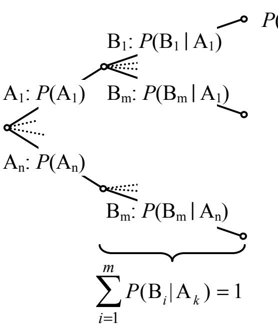
$$\boxed{P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k) \cdot P(A \mid E_k)}$$

c) Satz von Bayes: Die bedingte Wahrscheinlichkeit von E_i unter der Voraussetzung A, $P(A) \neq 0$, erhält man mit

$$\boxed{P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i) \cdot P(A \mid E_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(E_k) \cdot P(A \mid E_k)}}$$

Bemerkungen:

- Mit Hilfe der beiden letzten Sätze ist es nun möglich, Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsversuchen, die nicht mehr der Laplace-Bedingung genügen, zu berechnen: Beim nebenstehenden Beispiel ist die Chancengleichheit nicht gegeben, da die Kugeln in den Urnen eine unterschiedliche Verteilung haben und die vorgeschaltete Urnenwahl den Ziehprozess beeinflusst. Die Auswahl der Urnen selbst und das Entnehmen einer Kugel aus einem bestimmten Gefäß sind aber Laplace-Versuche.
- Die Multiplikationsregel und der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit lassen sich mit einem Baumdiagramm veranschaulichen, wenn pro Verzweigung die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Äste den Wert eins ergibt:



Die Verzweigungs- und Endpunkte stellen die „Und-Ereignisse“ dar. Ihre Wahrscheinlichkeiten berechnet man durch Multiplikationen der vorangegangenen (linksstehenden) „Pfadwahrscheinlichkeiten“. Gehören zu einem Ereignis E mehrere Endpunkte, so werden die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten addiert.

Die Multiplikationsregel ergibt sich durch fortgesetzte Anwendung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \underbrace{P(E_1 \cap E_2)}_{P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1)} \cdot P(E_3 \mid E_1 \cap E_2)$$

Aus $S = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ folgt $A = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap E_k)$ und daraus mit dem Additionssatz für unvereinbare Ereignisse

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap E_k)$$

Mit dem Multiplikationssatz folgen die Behauptungen **b)** und **c)**.

Beispiel: Von zwei Urnen enthält die erste 2 rote und 4 blaue Kugeln, die zweite 5 rote und 4 blaue. Einer der Urnen wird eine Kugel entnommen. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse

E: „Kugel ist rot und aus Urne 1“

F: „Ziehen einer roten Kugel“

G: „Eine entnommene rote Kugel ist eine Kugel aus Urne 1“

Wir betrachten die Ereignisse

$U_{1,2}$: „Urne 1 bzw. 2 gewählt“ und

R, B: „**r**ote bzw. **b**laue Kugel ziehen“

Mit $P(U_{1,2}) = \frac{1}{2}$; $P(R \mid U_1) = \frac{1}{3}$ so wie $P(R \mid U_2) = \frac{5}{9}$ folgt dann:

$$P(E) = P(R \cap U_1) = P(U_1)\,P(R \mid U_1) = \tfrac{1}{6}$$

$$P(F) = P(R \cap U_1) + P(R \cap U_2) = \tfrac{4}{9}$$

$$P(G) = P(U_1 \mid R) = \frac{P(R \cap U_1)}{P(R)} = \tfrac{3}{8}$$

Baumdiagramm für dieses Beispiel: