Bsp. 1. Entwickeln Sie folgende Funktionen in TAYLOR-Polynome 3. Grades mit den angegebenen Entwicklungsstellen x_0:

a) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$; $x_0 = 1$ **b)** $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$; $x_0 = 0$ **c)** $f(x) = 2x + \dfrac{16}{x^3+1}$; $x_0 = 0$ bzw. 1

Bsp. 2. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = e^{\sin x} - x + a$, $a > 0$, in ein quadratisches Polynom an der Stelle $x_0 = \pi$. Bestimmen Sie damit die Nullstelle der Funktion näherungsweise (welche der beiden Lösungen ist sinnvoll?). Testen Sie die Güte der Näherung für $a = 1; 2; 3$, indem Sie die gefundenen Lösungen in die Funktion einsetzen.

Bsp. 3. Integrieren Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{x+1}$ von $a = 0$ bis $b = \pi$ näherungsweise durch ein

a) quadratisches Interpolationspolynom mit den Stützstellen $x_i = 0; \frac{\pi}{2}; \pi$

b) quadratisches TAYLOR-Polynom mit der Entwicklungsstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Bsp. 4. Kurbeltrieb: der Kolbenweg s errechnet sich nach der Formel $s = l + r\cdot(1-\cos\varphi) - \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$, wobei r der Kurbelradius ist, l die Länge der Pleuelstange und $\varphi = \omega t$ der Drehwinkel.

a) Entwickeln Sie die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{a - bx^2}$ in ein quadratisches TAYLOR-Polynom mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und benutzen Sie das Ergebnis, um die Formel für den Kolbenweg zu vereinfachen (ersetzen Sie die Variablen a, b und x durch entsprechende Ausdrücke der Formel).

b) Verwenden Sie die in **a)** gewonnene Näherungsformel, um eine Näherungsformel für die Kolbengeschwindigkeit zu bestimmen (wie erhält man die Momentangeschwindigkeit aus dem Weg?).

c) Verwenden Sie die in **a)** gewonnene Näherungsformel, um für $l = \frac{15}{8}r$ den Winkel zu berechnen, bei dem der Kolbenweg gleich dem Radius ist. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem wahren Wert.

d) Benutzen Sie die in **b)** ermittelte Formel, um den Winkel für die maximale Geschwindigkeit zu berechnen ($l = \frac{15}{8}r$).

Bsp. 5. Von einem Kreissegment misst man den Bogen b, die Sehne s und die Segmenthöhe h. Geben Sie diese Größen in Abhängigkeit vom Kreisradius r und vom Öffnungswinkel φ an. Ersetzen Sie dann die auftretenden Winkelfunktionen durch ein TAYLOR-Polynom dritten (Sinus) bzw. vierten Grades (Kosinus) mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und erstellen Sie damit mindestens zwei Näherungsformeln zur Berechnung des Öffnungswinkels aus den gemessenen Größen b, s und h.

Lösungen:

1a) $\dfrac{1}{6} - x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ **b)** $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$ **c)** $16 + 2x - 16x^3$ bzw. $21 - 7x - 9x^2 + 5x^3$

2) 2,6350 ($-1{,}04\cdot10^{-2}$); 3,0720 ($-3{,}04\cdot10^{-6}$); 3,6306 ($-5{,}40\cdot10^{-3}$)

3a) 0,8147 **b)** 0,8716 (wahrer Wert ≈ 0,8438)

4a) $s \approx r(1-\cos\varphi + \frac{r}{2l}\sin^2\varphi)$ **b)** $v \approx \omega r(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin(2\varphi))$ **c)** 1,318 (1,301) **d)** 1,181

5) $\varphi \approx \dfrac{16h}{b+s}$ oder $\varphi \approx \dfrac{3(b^2-s^2)}{2bh}$