Bsp. 1. Überprüfen Sie die folgenden Reihen mittels Quotientenkriterium auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ **b)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ **c)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Bsp. 2. Ermitteln Sie den Konvergenzbereich der angegebenen Reihen mittels Quotientenkriterium:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \cdot x^{2k+1}}{2k+1}$ **b)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2k}}{k!}$ **c)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{(k+1)\cdot a^k}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2^k+1}}{k^2} \cdot x^k$ **e)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3k-2)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k)\cdot x^k}$ **(!)f)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-2k)}{k!} \cdot (x-1)^k$

Bsp. 3. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine TAYLOR-Reihe für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$:

a) $f(x) = \ln(a+bx)$ **b)** $f(x) = \frac{x}{e^x}$ **c)** $f(x) = \cos(2x)$

Verwenden Sie für die nachstehenden Aufgaben diese elementaren TAYLOR-Reihen:

a) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$ **b)** $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

c) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$ **d)** $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\cdot x^k}{k} \quad ; \quad x \in \left]-1;1\right]$

e) $(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1-k)}{k!}\cdot x^k \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-1;1]$ für $n > 0$, $x \in \left]-1;1\right[$ für $n < 0$

Bsp. 4. Ermitteln Sie die Reihe für $\frac{1}{1+x}$ durch Differenzieren von $\ln(1+x)$ und vergleichen Sie diese mit der Reihe für $(1+x)^{-1}$.

Bsp. 5. Zeigen Sie die Gültigkeit von $\ln(1-x^2) = \ln(1+x) + \ln(1-x)$ mittels der Reihe von $\ln(1+x)$.

Bsp. 6. Ermitteln Sie die Reihe für den Areahyperbeltangens : $\tanh^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Bsp. 7. Ermitteln Sie die Reihe für $\int_1^x \frac{e^t}{t}\cdot dt$.

Bsp. 8. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ durch Verwendung der TAYLOR-Reihe. Überprüfen Sie das Ergebnis durch die Anwendung der Regel von DE L‘ HOSPITAL.

Bsp. 9. Fehlerabschätzung bei der Verwendung von TAYLOR-Polynomen:

a) Welcher Fehler ist zu erwarten, wenn man e^{-1} bzw. e^{1} mittels der ersten 4 Glieder der TAYLOR-Reihe berechnet?

b) In welchem Bereich liegt $\cos(1{,}2)$ bei Verwendung der ersten 4 Glieder der entsprechenden Reihe?

c) Wie viele Glieder der Reihe für $\ln(1+x)$ benötigt man mindestens, um den Fehler bei der Berechnung von $\ln(1{,}25)$ kleiner als $5\cdot 10^{-6}$ zu halten? Vergleichen Sie dies mit der Reihe von $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Bsp. 10. Man berechne π mittels der Reihe für den $\arctan x$, wobei für dessen Reihenentwicklung die Beziehung

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

verwendet werden soll.

a) $\pi = 4\cdot\arctan 1$, Verwendung der ersten 3 Glieder

b) $\pi = 4\cdot(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3})$, Verwendung der ersten 3 Glieder

c) Wie viele Glieder benötigt man für die beiden Fälle **a)** und **b)**, um eine Genauigkeit von mindestens 10^{-6} zu erhalten?

Lösungen:

1a) konv. **b)** keine Entscheidung **c)** konv.

2a) $|x| < \sqrt{\frac{1}{2}}$ **b)** $\mathbb{R}$ **c)** $0 < x < 2a$ für $a > 0$, $2a < x < 0$ für $a < 0$

d) $|x| < \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ **e)** $|x| > \frac{3}{2}$ **f)** $\mathbb{R}$ für n gerade, $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ sonst

3a) $\ln a - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\cdot\left(\frac{bx}{a}\right)^k$ **b)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\cdot x^{k+1}$ **c)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot(2x)^{2k}}{(2k)!}$

4) gleich

5) $-x^2$ und $-x$ in die Reihe einsetzen

6) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$

7) $\ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k - 1}{k\cdot k!}$

8) $-\frac{1}{2}$

9a) $e^{-1}: < 4{,}2\cdot 10^{-2}$ bzw. $e^{1}: < 1{,}2\cdot 10^{-1}$ **b)** $0{,}36225 < \cos 1{,}2 < 0{,}36236$ **c)** $\ln(1+x)$: 7 Gl., $\ln\frac{1+x}{1-x}$: 3 Gl.

10) $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ **a)** $\approx 3{,}4667$ **b)** $\approx 3{,}1456$ **c) (a)**: 2000000 **(b)**: 9