<u>Bsp. 1.</u> Von drei Ereignissen A, B und C kennt man: $P(\mathrm{A}) = 0{,}5$, $P(\overline{\mathrm{C}}) = 0{,}25$, $P(\overline{\mathrm{B}} \cap \mathrm{C}) = 0{,}3$, $P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = 0{,}6$ und $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}8$, mindestens eines der beiden Ereignisse A oder C tritt immer ein.

a) Benennen Sie alle angeführten und folgenden Wahrscheinlichkeiten verbal.

b) Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

(i) $P(\mathrm{C})$ **(ii)** $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ **(iii)** $P(\mathrm{B})$

(iv) $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$ **(v)** $P(\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B})$ **(vi)** $P(\mathrm{B} \mid \mathrm{C})$

c) Sind die Ereignisse B und C unabhängig?

d) Schließen A und C einander aus?

e) Wie groß ist $P(\mathrm{C} \mid \mathrm{A})$?

<u>Bsp. 2.</u> In einem Karton mit 50 Glühbirnen befinden sich 4 defekte Leuchtmittel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 5 entnommenen Birnen (ohne Zurücklegen!)

a) nur zwei defekte sind **b)** höchstens eine defekt ist **c)** mindestens drei funktionieren

d) nur die zweite defekt ist **e)** die zweite eine defekte ist **f)** alle leuchten

g) nur die erste und letzte defekt ist **h)** nur vier funktionieren.

<u>Bsp. 3.</u> Dreimaliges Werfen eines idealen Würfels; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) nur gerade Zahlen zu werfen **b)** genau einmal eine „Sechs“ zu würfeln

c) dass die Augensumme der ersten beiden Würfe die Augenzahl des dritten ergeben

d) dass die Augensumme mindestens 12 beträgt

e) dass jeder Wurf eine höhere Augenzahl als der vorangegangene aufweist.

<u>Bsp. 4.</u> Aus einem Spiel mit 32 Karten werden drei Karten **(i)** ohne **(ii)** mit Zurückstecken gezogen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) keine Dame gezogen wird **b)** mindestens ein As gezogen wird

c) alle Karten die gleiche Farbe haben **d)** alle Karten den gleichen Wert haben

e) ein Bube, eine Dame und ein König gezogen wird

f) die ersten beiden Karten keine Könige sind **g)** nur zwei Karten den gleichen Wert haben

h) entweder drei Buben oder drei Herz gezogen werden

i) die erste Karte eine Zehn, die zweite ein As ist

j) die zweite ein As ist, wenn die erste eine Zehn ist

<u>Bsp. 5.</u> Zwei Urnen A und B enthalten **r**ote und **b**laue Kugeln: A(3**r** / 7**b**) und B(6**r** / 4**b**)

a) Aus beiden wird je eine Kugel gezogen; berechnen Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(i) alle Kugeln rot sind **(ii)** mindestens eine Kugel blau ist

(iii) höchstens eine Kugel rot ist **(iv)** beide Kugeln verschiedene Farbe haben

(v) die bei **(iv)** gezogene blaue Kugel aus B stammt.

b) Aus A wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis man eine rote Kugel erhält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(i) die erste bereits die rote ist **(ii)** man dreimal ziehen muss

(iii) mindestens zweimal gezogen werden muss

(iv) höchstens viermal gezogen werden muss.

c) Aus A wird eine Kugel gezogen: ist sie blau, zieht man die nächste aus B, andernfalls noch eine aus A. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Kugeln gleichfarbig?

Bsp. 6. Zur Herstellung eines Produkts sind drei Maschinen A, B und C nötig, wobei A zu 95%, B zu 90% und C zu 80% fehlerfrei arbeiten.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(i) ein fehlerfreies Produkt entsteht **(ii)** ein Produkt gleich zwei Fehler aufweist

(iii) bei einem Produkt mit einem einzigen Fehler dieser von C verursacht wurde.

b) Zur Produktionsverbesserung wird eine zweite Maschine C mit nur 5% Ausschuss in Betrieb genommen, wobei die neue Maschine für 70%, die alte für 30% der Produkte herangezogen wird. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit für ein fehlerfreies Produkt?

Bsp. 7. Bei der Qualitätsprüfung eines Bauteils erfolgt eine maschinelle und anschließend eine händische Prüfung, wobei maschinell jeder Bauteil, per Hand nur 30% überprüft werden. Bei der automatischen Prüfung werden 90% der fehlerhaften Produkte, bei der folgenden sogar 99% erkannt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhafter Bauteil unerkannt bleibt? (Hinweis: Ereignisbaum zeichnen!)

b) Welcher Prozentsatz müsste per Hand (bei gleicher Erkennungsquote) mindestens getestet werden, wenn der Hersteller eine Wahrscheinlichkeit von höchstens 4% für ein fehlerhaftes Produkt garantieren möchte?

Bsp. 8. In einem (fiktiven) Land gibt es um 12% mehr Frauen als Männer, 45% der Bevölkerung sind „naturblond“, wobei auf 8 blonde Frauen 7 blonde Männer kommen. Von den blonden Männern haben 60% blaue Augen, bei den Blondinen trifft dies sogar auf 75% zu. 4% der Männer und 9% der Frauen mit anderer Haarfarbe haben ebenfalls blaue Augen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) eine ausgewählte Person ein Mann ist **b)** jemand blond und weiblich ist

c) eine (ausgewählte) Frau blond ist **d)** eine ausgewählte Person blaue Augen hat

e) ein Mann blaue Augen hat **f)** eine blonde Person blauäugig ist

g) eine blauäugige Person blond ist **h)** jemand entweder blond oder blauäugig ist

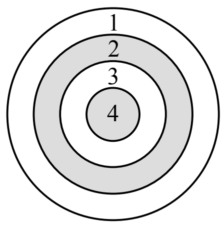
i) ein Mann weder blond noch blauäugig ist?

Bsp. 9. Ein Glücksrad ist in 5 Sektoren unterteilt. Die Sektorenflächen bilden eine absteigende arithmetische Folge, wobei der 1. Sektor dreimal so groß ist wie der 5. Sektor. Durch Drehen des Rades wird die Gewinnzahl ermittelt: Es ist die Nummer des Sektors, der dabei bei der Markierung zum Stehen kommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die Zahl 4 gewinnt, **b)** eine ungerade Zahl kommt,

c) eine größere Zahl als 3 Gewinnzahl ist und **d)** die Vier gewinnt, wenn die Eins nicht gewinnt?

Bsp. 10. Eine kreisförmige Zielscheibe wird durch konzentrische Kreise in drei Kreisringe und einen Mittelkreis geteilt. Die Ringbreiten sind gleich groß wie der kleinste Radius. Ein geworfener Pfeil soll die Scheibe **(i)** immer treffen, **(ii)** in 1 von 9 Fällen verfehlen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurf



a) 4 Punkte, **b)** höchstens 2 Punkte zu werfen?

Bsp. 11. In einem Quadrat ABCD wird ein beliebiger Punkt E markiert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Dreieck ABE beim Eckpunkt E

a) rechtwinkelig ist, **b)** stumpfwinkelig ist oder

c) innerhalb der Messtoleranz $90° \pm 0{,}5°$ „rechtwinkelig“ ist?

Bsp. 12. Ein Sportler hat die Möglichkeit, mittels Straßenbahn zwei für ihn gleichwertige Sportanlagen in vergleichbarer Zeit zu erreichen, allerdings liegen sie, von seiner Einstiegshaltestelle aus betrachtet, in entgegengesetzten Richtungen. Er hat sich angewöhnt, in die erste ankommende „Bim“ zu steigen, um zur Sportanlage zu gelangen. Dabei stellt er fest, dass er eine davon dreimal so oft als die andere frequentiert.

a) Woran kann dies liegen, wenn die Straßenbahnen in beiden Richtungen im gleichen Abstand fahren und er sicher „zufällig“ die Haltestelle erreicht?

b) Wie groß ist ca. die Wahrscheinlichkeit, dreimal hintereinander zur gleichen Sportstätte zu fahren?

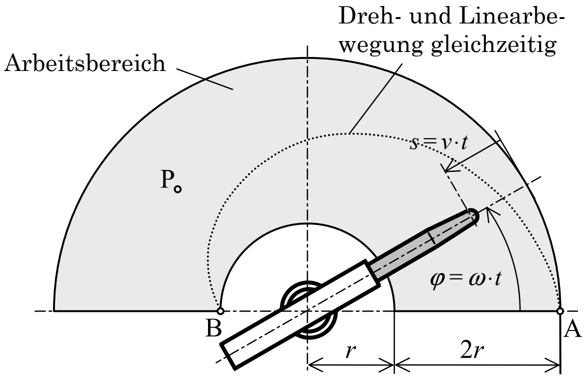
Bsp. 13. Die Bewegung eines Federpendels wird fotografiert (der Weg-Zeit-Zusammenhang sei eine Sinusfunktion). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf dem Foto die Masse näher einem Totpunkt als der Gleichgewichtslage ist?

Bsp. 14. Der Arm eines Punktschweißroboters ist drehbar um eine senkrechte Achse, durch eine horizontale Teleskopbewegung des Arms ist eine radiale Bewegung der Elektrode möglich. Für die Positionierung von A zu einem beliebigen Punkt P des Arbeitsbereichs sei die Geschwindigkeit v konstant angenommen mit

$$v = \frac{2r}{\pi} \cdot \omega \,,$$

so dass entweder die Drehbewegung die Positionierzeit bestimmt oder die Linearbewegung. Wie wahrscheinlich ist es, dass die Drehung diese Zeit vorgibt?

Hinweis: Die Kurve AB für die gleichzeitige Bewegung in Parameterform (Parameter: Zeit t) zur Flächenberechnung verwenden.



Lösungen:

1a) ... A eintritt / ... C nicht eintritt / ... C eintritt, aber B nicht / ... B eintritt, wenn A eingetreten ist / ... A oder B oder beide eintreten / ... C eintritt / ... A und B eintreten / ... B eintritt / ... B und C eintreten / ... entweder B eintritt oder A nicht (oder beides der Fall ist) / ... B eintritt, wenn C eingetreten ist

b) 0,75 / 0,3 / 0,6 / 0,45 / 0,8 / 0,6 **c)** ja ($P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{C})$) **d)** nein ($P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{C}) > 1$) **e)** 0,5

2a) 0,0430 **b)** 0,9550 **c)** 0,9980 **d)** 0,0616 **e)** 0,08 **f)** 0,6470 **g)** 0,0043 **h)** 0,3081

3a) $\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{25}{72}$ **c)** $\frac{5}{72}$ **d)** $\frac{3}{8}$ **e)** $\frac{5}{54}$

4a) 0,6605 / 0,6699 **b)** 0,3395 / 0,3301 **c)** 0,0452 / 0,0625 **d)** 0,0065 / 0,0156 **e)** 0,0129 / 0,0117
f) 0,1016 / 0,0957 **g)** 0,5419 / 0,5625 **h)** 0,0121 / 0,0176 **i)** 0,0161 / 0,0156 **j)** 0,1290 / 0,125

5a) 0,18 / 0,82 / 0,82 / 0,54 / $\frac{2}{9}$ **b)** 0,3 / 0,175 / 0,7 / 0,9458 **c)** 0,3467

6a) 0,684 / 0,032 / 0,604 **b)** 0,7738

7a) 0,0703 **b)** mindestens 61%

8a) 0,44 **b)** 0,24 **c)** 0,429 **d)** 0,344 **e)** 0,307 **f)** 0,68 **g)** 0,890 **h)** 0,488 **i)** 0,502

9a) 0,15 **b)** 0,6 **c)** 0,25 **d)** $\frac{3}{14}$

10a) $\frac{1}{16}/\frac{1}{18}$ **b)** $\frac{3}{4}/\frac{7}{9}$ **11a)** 0 **b)** $\frac{\pi}{8}$ **c)** $\cot 89{,}5° \approx 0{,}008727$

12a) Die Wartezeiten zwischen zwei in Gegenrichtung fahrende Straßenbahnen sind verschieden. **b)** $\approx \frac{7}{16}$

13) $\frac{2}{3}$ **14)** $\frac{7}{12}$