Bsp. 1. Zufallsgrößen und ihre Verteilungen bzw. Kennzahlen:

a) Werfen von 2 Würfel; die Zufallsvariable X ordnet jedem Wurf die Differenz der Augenzahlen zu.

(i) Erstellen Sie eine gemeinsame Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsfunktion $g(x) = P(X = x)$ und die Verteilungsfunktion $G(x) = P(X \leq x)$.

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$ dieser Verteilung.

b) In einem Gefäß liegen 5 rote und 3 schwarze Kugeln. Verwenden Sie jeweils eine geeignete Zufallsgröße für die folgenden Erwartungswerte:

(i) Wie oft ist im Schnitt ohne Zurücklegen zu ziehen, bis eine schwarze Kugel gezogen wird?

(ii) Wie oft muss man im Schnitt ohne Zurücklegen ziehen, bis man zwei rote Kugeln gezogen hat?

(iii) Mit wie vielen roten Kugeln ist bei zwei entnommenen Kugeln im Mittel zu rechnen?

c) Ein Glücksspielautomat zeigt verschiedene Symbole auf drei nebeneinander liegenden Walzen. Das Gewinnsymbol ist eine Kirsche: Sie tritt mit einer Häufigkeit von 30% bei der ersten, mit 15% bei der zweiten und mit 10% bei der dritten Walze auf. Je nach Anordnung der Kirschen ergeben sich folgende Gewinne: 2,- €, wenn die 3. Walze oder wenn die 1. und 2. Walze gemeinsam die Kirsche zeigen,
10,- €, wenn das Symbol gemeinsam auf der 1. und 3. bzw. 2. und 3. Walze erscheint und
20,- €, wenn das Glückssymbol gleichzeitig auf allen Walzen erscheint.

Mit welchem Verlust ist bei einem Einsatz von einem Euro auf lange Sicht zu rechnen?

d) Um den Zusammenhang Konzentrationsfähigkeit – Zeitdauer zu untersuchen, mussten Testpersonen innerhalb einer gewissen Zeit bestimmte Arbeiten (Multiplizieren zweistelliger Zahlen etc.) immer wieder ausführen. Die stetige Zufallsgröße T („Zeitpunkt, ab der die Arbeiten nicht mehr innerhalb der vorgegebenen Zeit ausgeführt werden können“) besitze die (empirisch ermittelte) Verteilungsfunktion

$$G(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{16} \cdot (5t^4 - 2t^5) & 0 \leq t \leq 2 \text{ (h)} \\ 1 & 2 < t \end{cases}$$

(i) Ermitteln Sie die Dichtefunktion g, den Erwartungswert und die Standardabweichung.

(ii) Wie viele der 768 Testpersonen

- konnten sich höchstens eine halbe Stunde lang konzentrieren?
- mussten innerhalb der vorletzten halben Stunde den Test beenden?

Bsp. 2. Binomialverteilung

a) 42,8% der Wähler stimmten für die Partei P. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 ausgezählten Stimmzetteln **(i)** höchstens 3, **(ii)** mindestens 2 aber weniger als 6 bzw. **(iii)** genau 5 für diese Partei abgegeben worden sind?

b) Bei einer Dichtungsproduktion entstehen erfahrungsgemäß 4% Ausschuss.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer 10er-Packung höchstens eine defekte Dichtung ist?

(ii) Nach dem Öffnen einer 10er-Packung wird gleich die erste als unbrauchbar erkannt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, noch eine weitere kaputte Dichtung zu finden?

(iii) Wie viele defekte Dichtungen sind im Schnitt unter 50 Dichtungen zu finden? Wie groß ist die erwartete Standardabweichung?

c) Bei ca. 2% der Nägel, die eine Maschine produziert, fehlen die Köpfe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden sich unter 50 Stück **(i)** lauter Nägel mit Köpfen, **(ii)** mehr als 3 kopflose Nägel bzw. **(iii)** mindestens 2 aber nicht mehr als 4 Ausschussstücke?

d) Für die 30 Mitarbeiter einer Firma soll eine Parkmöglichkeit vorgesehen werden. Erfahrungsgemäß fahren 70% mit einem eigenen Wagen zur Arbeit.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit genügt ein Parkplatz mit 22 Stellplätzen?

(ii) Wie viele Stellplätze sollten vorgesehen werden, damit diese mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit ausreichen?

e) Bevor ein neues Produkt in Fertigung gehen soll, wird eine Meinungsumfrage durchgeführt. Bei einer Zustimmung von ca. 60% will man das Produkt auf den Markt bringen. Für die Umfrage werden 100 Personen zufällig ausgewählte. Äußern sich mehr als 65% positiv, so beginnt man mit der Produktion, bei weniger befragt man noch einmal 100 Personen. Finden sich dabei mindestens 60% Befürworter, so wird mit der Fertigung begonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit startet die Produktion, wenn tatsächlich 60% bzw. 50% Zustimmung vorhanden ist?

Bsp. 3. POISSON-Verteilung

a) Saatgut wird in Säckchen zu 30 g verkauft. Aus Erfahrung weiß man, dass pro 10 g drei Samen nicht keimen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit für **(i)** genau 5, **(ii)** mindestens 3 aber weniger als 9 bzw. **(iii)** höchstens 10 Samen nicht keimen.

b) Bei einem α-Zerfall werden im Schnitt 4 α-Teilchen innerhalb von 8,5 s mittels GEIGER-Zähler festgestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, innerhalb von 20 s **(i)** genau 3, **(ii)** mindestens 4 aber weniger als 10 Impulse zu erhalten?

c) Für eine Tierschutzlotterie werden 10000 Lose aufgelegt mit 500 garantierten Gewinnen. Um den Verkauf zu fördern, werden pro Haushalt 4 Lose verschickt. Wie hoch ist die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn man diese Lose kauft?

d) Blumenzwiebeln einer bestimmten Sorte werden streng nach Farben getrennt verpackt. Durch eine Unachtsamkeit gelangen ca. 200 Zwiebeln von Rotblühern in die Abfüllmenge für 100 Packungen Blaublüher.

(i) Wie viele Packungen wird es mit jeweils 0, 1, 2 oder 3 Fremdzwiebeln geben?

(ii) Wenn in einer Packung mit Sicherheit eine Zwiebel eines Rotblühers ist: Wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, noch genau einen weiteren Rotblüher zu entdecken?

Bsp. 4. Normalverteilung

a) Rechnen mit der Tabelle: **(i)** $\Phi(1{,}433) \approx$ **(ii)** $\Phi(-0{,}778) \approx$ **(iii)** $\Phi(z) = 0{,}992490$; $z \approx ?$

(i) Die Bleche einer Produktion haben eine durchschnittliche Dicke von 6,00 mm bei einer Standardabweichung von 0,07 mm. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Blechstärke

(ii) größer als 5,91 mm ist,

(iii) höchstens 6,13 mm beträgt bzw.

(iv) zwischen 5,97 mm und 6,04 mm liegt.

b) Teebeutel einer bestimmten Sorte enthalten im Mittel 12 g Tee bei 0,5 g Standardabweichung.

(i) Teebeutel mit weniger als 10,8 g und mehr als 12,8 g werden nicht in Schachteln zu je 20 Beuteln verpackt, sondern aussortiert und wiederverwertet. Wie viele Beutel werden für einen Karton mit 64 Schachteln durchschnittlich auszusortieren sein?

(ii) Lässt sich der Ausschussanteil durch Änderung der eingestellten Füllmenge von derzeit 12,0 g auf 11,8 g verringern?

c) Die Länge von Bolzen ist normalverteilt mit $\mu = 13{,}8\,\text{cm}$ und $\sigma = 0{,}13\,\text{cm}$.

(i) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- die Länge eines Bolzen mindestens $14{,}0\,\text{cm}$ beträgt,
- die Bolzenlängen im Toleranzbereich $13{,}8\,\text{cm} \pm 0{,}2\,\text{cm}$ liegt bzw.
- die mittlere Bolzenlänge einer 30er-Packung zwischen $13{,}7\,\text{cm}$ und $13{,}9\,\text{cm}$ liegt.

(ii) Bis zu welcher Obergrenze wird die Länge toleriert, wenn 6,2% der Bolzen Ausschuss sind?

(iii) Bei einer bestimmten Verwendung ist eine Mindestlänge von $13{,}6\,\text{cm}$ vorgeschrieben. Aufgrund einer Maximallänge $l_{\max}$ sind daher nur 87,7% aller Bolzen brauchbar. Wie groß ist die tolerierte maximale Länge?

d) Durch Stichproben wurde festgestellt, dass Lackdosen durchschnittlich $2{,}50\,\text{kg}$ Farbe enthalten bei einer Standardabweichung von 25g.

(i) Wie viel Prozent der Dosen enthalten mehr als $2{,}52\,\text{kg}$ Lack?

(ii) Für einen Auftrag werden $12{,}40\,\text{kg}$ Farbe benötigt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dafür 5 Dosen nicht ausreichen?

e) Umfangreiche Stichproben haben ergeben, dass ca. 3% der neugeborenen Mädchen kleiner als $46\,\text{cm}$ sind. Umgekehrt sind auch ca. 3% größer als $57\,\text{cm}$.

(i) Unter der Annahme einer Normalverteilung schätze man die Durchschnittsgröße und die Standardabweichung der Größenverteilung.

(ii) Wie viel Prozent der neugeborenen Mädchen sind zwischen $50\,\text{cm}$ und $55\,\text{cm}$ groß?

Lösungen:

1ai)

x	0	1	2	3	4	5
g	6	10	8	6	4	2
G	6	16	24	30	34	36

$\cdot \frac{1}{36}$

(ii) $E(X) \approx 1{,}94$; $V(X) \approx 2{,}05$

bi) X: „Anzahl der Züge bis zum Ziehen einer schwarzen Kugel"; $E(X) = 2{,}25$
ii) Y: „Anzahl der Züge bis zum Ziehen von zwei roten Kugeln"; $E(Y) = 3$
iii) Z: „Anzahl der roten Kugeln bei zwei gezogenen"; $E(Z) = 1{,}25$

c) 0,35 € **di)** $g(x) = \frac{5}{8} \cdot (2t^3 - t^4)$; $E(X) \approx 1{,}33\,\text{h}$; $\sqrt{V(X)} \approx 0{,}36\,\text{h}$; **(ii)** 12 Personen; 342 Personen

2ai) $\approx 0{,}3148$ **(ii)** $\approx 0{,}7514$ **(iii)** $\approx 0{,}2216$ **bi)** $\approx 0{,}9418$ **(ii)** $\approx 0{,}3075$ **(iii)** 2; $\approx 1{,}4$
ci) $\approx 0{,}3642$ **(ii)** $\approx 0{,}0178$ **(iii)** $\approx 0{,}2610$ **di)** $\approx 0{,}7186$; 24 **e)** 60%: 0,6028 50%: 0,0293

3ai) $\approx 0{,}0607$ **(ii)** $\approx 0{,}4494$ **(iii)** $\approx 0{,}7060$ **bi)** $\approx 0{,}0114$ **(ii)** $\approx 0{,}5175$ **c)** $\approx 0{,}1813$
di) $\approx 14/27/27/18$ **(ii)** $\approx 0{,}3130$

4ai) $\approx 0{,}924069$ **(ii)** $\approx 0{,}218286$ **(iii)** $\approx 2{,}432$ **bi)** $\approx 0{,}9007$ **(ii)** $\approx 0{,}9684$ **(iii)** $\approx 0{,}3820$
ci) ≈ 86 **(ii)** ja **di)** $\approx 0{,}0620/0{,}8761/0{,}99997$ **(ii)** $\approx 14{,}0\,\text{cm}$ **(iii)** $\approx 14{,}0\,\text{cm}$ **ei)** $\approx 9{,}1\%$ **(ii)** $\approx 3{,}7\%$
fi) $\mu \approx 51{,}5\,\text{cm}$; $\sigma \approx 2{,}92\,\text{cm}$ **(ii)** $\approx 58\%$