Hinweis: Auch bei der Reifeprüfung stehen bei den Mathematikbeispielen die Themenbereiche dabei.

Bsp. 1. **(Funktionenlehre)** Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x+a)\cdot\sqrt{bx+c}$, $c \neq a\cdot b$

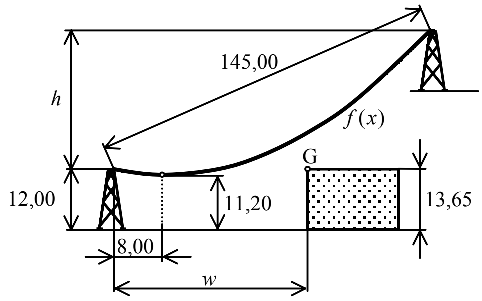
a) Zeigen Sie: Wenn die Funktionskurve einen Extrempunkt besitzt, dann gibt es keinen Wendepunkt und umgekehrt. (Hinweis: die gewonnen Werte für die Extrem- bzw. Wendestellen in die Wurzel einsetzen und den Definitionsbereich überprüfen!)

b) Zeigen Sie: Für den Fall, dass die Funktionskurve einen Extrempunkt besitzt, gibt es auch zwei Nullstellen, bei einem Wendepunkt nur eine Nullstelle (Definitionsbereich!). In welchem Verhältnis teilt die Extremstelle die Strecke zwischen den Nullstellen?

c) Die Kurve möge zwei Nullstellen besitzen: Stellen Sie die Gleichung der Tangente jener Nullstelle auf, die nicht am Rand des Definitionsbereichs liegt und berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Tangente und der x-Achse innerhalb der Nullstellen von f. Vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem der Fläche zwischen f und der x-Achse. Welches überraschende Ergebnis ergibt sich für das Verhältnis dieser beiden Flächeninhalte?

d) Die Kurve f geht durch den Punkt P(7 | 12) und schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = 3$ unter einem Winkel von 45°. Berechnen Sie die Parameter a, b und c.

Bsp. 2. **(Funktionenlehre – Geometrie)** Der Durchhang einer Hochspannungsleitung sei näherungsweise parabelförmig mit $f(x) = \dfrac{(x-a)^2}{b} + c$ (Längeneinheit: Meter). Berechnen Sie:



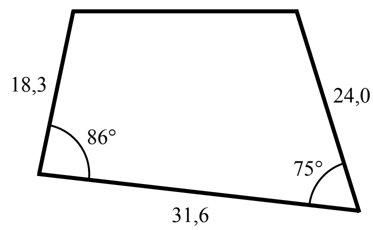
a) den Höhenunterschied h

b) die Länge des Seils; benutzen Sie dazu folgende Formel für die Kurvenlänge l: $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\cdot dx$

(für die Integration verwende man $\sqrt{1+(kx+d)^2}$ und $\int \sqrt{1+u^2}\cdot du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|$)

c) die Weite w, damit der Normalabstand des Gebäudepunkts G von der Leitung 11,00 m beträgt.

Bsp. 3. **(Vermessungsaufgabe – Finanzmathematik)** Jemand möchte das nebenstehende viereckige Grundstück ABCD kaufen (die Längenangabe erfolgt in Meter).



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt (auf Quadratmeter genau) und den Preis für das Grundstück, wenn der Preis pro Quadratmeter 120,- € beträgt.

b) Für die Finanzierung stehen zwei Modelle zur Auswahl:

(i) Es werden 40000,- € angezahlt, der Rest soll durch 24 gleich hohe Monatsraten beglichen werden, wobei die erste Rate ein halbes Jahr nach dem Kauf fällig ist.

(ii) Es werden 45000,- € angezahlt, der Rest soll durch gleich hohe, einen Monat nach dem Kauf beginnende Monatsraten in der Höhe von 750,- € und einer Restzahlung, zahlbar mit der letzten Rate, beglichen werden.

Welche Finanzierung kommt billiger, wenn ein Monatszinssatz von 0,7% vereinbart wird?

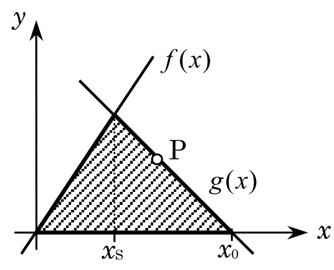
Bsp. 4. **(Geometrie – Fehlerfortpflanzung)** Von einem Dreieck ABC kennt man die Seiten a und b und man weiß, dass der Winkel α um exakt $90°$ größer als der Winkel γ ist.

a) Geben Sie Formeln zur Berechnung von γ und c aus den Seiten a und b an.

b) Werten Sie diese Formeln für $a = 27{,}3\,\text{cm}$ und $b = 18{,}6\,\text{cm}$ aus. Welcher Fehler ist für die Seite c zu erwarten, wenn a und b mit einer Genauigkeit von $\pm 1\,\text{mm}$ gemessen werden? Rechnen Sie mit der Fehlerfortpflanzung nach GAUSS.

c) Das Dreieck mit den Zahlenwerten aus **b)** ist die Basis einer Pyramide ABCS, deren Spitze S genau senkrecht über dem Eckpunkt A liegt. Die Seitenkante $s = \overline{\text{BS}}$ schließt mit der Basisseite a einen Winkel von 65,0° ein. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide (Hinweis: die Höhe auf a des Basisdreiecks ABC hat denselben Fußpunkt wie die Höhe auf a des Seitenflächendreiecks BCS).

Bsp. 5. **(Extremwertaufgabe)** Gegeben sind die Funktion $f(x) = k \cdot x$, $k > 0$, und ein Punkt $\text{P}(x_\text{P} \mid y_\text{P})$ zwischen der Geraden f und der x-Achse. Gesucht ist eine Gerade g durch den Punkt P, so dass der Flächeninhalt des von den beiden Geraden und der x-Achse eingeschlossenen Dreiecks minimal ist.

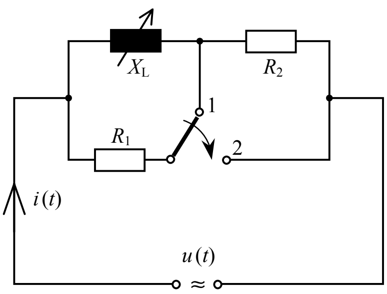


a) Berechnen Sie $g(x)$, x_0 und x_S.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt P ein Seitenhalbierungspunkt ist.

Bsp. 6. **(Anwendung komplexer Rechnung, Fehlerrechnung, Extremwertberechnung)**

a) Bei welcher Einstellung des Blindwiderstands X_L ist die Phasenlage des Stroms $i(t)$ unabhängig von der Schalterstellung? Geben Sie X_L in Abhängigkeit von R_1 und R_2 an.



$(X_\text{L} = \omega L)$

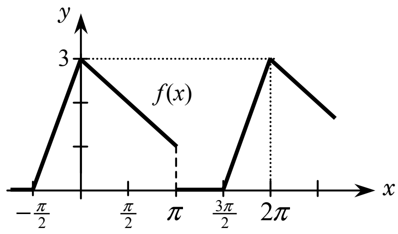
b) Geben Sie für beide Schalterstellungen die Einstellungen $X_{\text{L},i}$ des Blindwiderstands X_L (in Abhängigkeit von R_1 und R_2) an, bei welchen der Phasenwinkel des Stroms jeweils ein Maximum wird. Zeigen Sie, dass diese Maximalwinkel für beide Schalterstellungen gleich groß sind. (Hinweis: da der Tangens eine streng monoton steigende Funktion ist, entspricht einem Tangensmaximum auch ein Winkelmaximum!).

c) Berechnen Sie für die Maximalwinkel jeweils den Gesamtwiderstand (das ist der Betrag des Scheinwiderstands) für die Schalterstellungen 1 und 2; welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen und den Werten der Widerstände $X_{\text{L},i}$?

d) Welcher interessante Zusammenhang ergibt sich für die Widerstände $X_{\text{L},i}$ und X_L von **a)** und **b)**?

e) Berechnen Sie den maximalen Phasenwinkel für $R_1 = (112 \pm 2)\,\Omega$ und $R_2 = (50 \pm 1)\,\Omega$. Verwenden Sie zur Fehlerberechnung das Fehlerfortpflanzungsgesetz von GAUSS.

Bsp. 7. **(Fourieranalyse, Fourierkoeffizienten)**
Berechnen Sie für die angegebene 2π-periodischen Funktion die Koeffizienten a_0, a_k und b_k der Fourierreihe



$$s_f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$$

Werten Sie die Formeln für $k = 1$ und $k = 2$ aus.

Bsp. 8. **(Funktionen- und Gleichungslehre)** Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{ax}{(x^2+b)^2}$; $a, b \neq 0$

a) Zeigen Sie: **(i)** Wenn die Kurve Polstellen hat, dann gibt es keine Extrempunkte und umgekehrt.
(ii) Wenn $f(x)$ Extrempunkte besitzt, dann gibt es immer drei Wendepunkte.

b) Ist es möglich, dass sowohl die Extremstellen als auch alle Wendestellen rationale Zahlen sind (das heißt, dass $x_E, x_W \in \mathbb{Q}$ gilt)?

c) Konkret: $f(x)$ hat im Punkt $P(1{,}5 \mid 72)$ eine Tangente mit der Steigung $k = 624$.

(i) Berechnen Sie die Parameter a und b.

(ii) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Wendepunkt. Unter welchem Winkel schneidet die Tangente die Kurve f ein weiteres Mal?

(iii) Eine Polynomfunktion 3. Grades, $p(x)$, soll den gleichen Wendepunkt und die gleiche Wendetangente wie die gegebene Kurve haben und außerdem diese im ersten Quadranten noch einmal berühren. Bestimmen Sie das Bildungsgesetz von $p(x)$ und den Berührpunkt $B(x_B > 0 \mid \ldots)$.

(iv) Berechnen Sie den Inhalt der im ersten Quadranten liegenden, von der Tangente und den beiden Kurven $f(x)$ und $p(x)$ begrenzten Fläche.

Lösungen:

1a) E existiert nur für $c > ab$, W für $c < ab$ **b)** $-a \in \mathbb{D}$ nur für $c > ab$; x_E teilt vom Rand weg im Verhältnis $1:2$

c) $x_0 = -a$ liegt nicht am Rand, $t(x) = \sqrt{c-ab} \cdot (x+a)$; $A = \dfrac{(c-ab)^{\frac{5}{2}}}{2b^2}$, das Verhältnis ist unabhängig von a, b und c

d) -3, 2, -5

2a) $f(x) = \dfrac{(x-8)^2}{80} + 11{,}20$; $h = 105{,}00\,\text{m}$ **b)** $l \approx 154{,}8\,\text{m}$ **c)** $w = 44{,}6\,\text{m}$

3a) $583\,\text{m}^2$ kosten 69960,- € **b)** die Variante (ii) ist um 295,16 € billiger

4a) $\gamma = \arccos\left(\dfrac{b}{4a} + \sqrt{\left(\dfrac{b}{4a}\right)^2 + \dfrac{1}{2}}\right)$; $c = \sqrt{a^2 + \dfrac{b^2}{2} - \sqrt{\dfrac{b^4}{4} + 2a^2b^2}}$ **b)** $\gamma \approx 26{,}1°$; $c \approx (13{,}4 \pm 0{,}14)\text{cm}$

c) $V \approx 791\,\text{cm}^3$

5a) $x_S = \dfrac{2y_P}{k}$; $x_0 = 2x_P - x_S$; $g(x) = \dfrac{y_P}{x_P - x_0}(x - x_0)$ **b)** aus x_0 folgt $x_P = \dfrac{x_0 + x_S}{2}$ bzw. aus x_S $y_P = \dfrac{y_S}{2}$

6a) $X_L = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$ **b)** $X_{L,1} = R_1 \cdot \sqrt{\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}}$; $X_{L,2} = \sqrt{R_2 \cdot (R_1 + R_2)}$ **c)** $|\underline{Z}_1| = X_{L,2}$; $|\underline{Z}_2| = X_{L,1}$

d) $X_L = \sqrt{X_{L,1} \cdot X_{L,2}}$, das ist das geometrische Mittel **e)** $31{,}89° \pm 0{,}45°$

7) $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{\pi}x + 3 & -\frac{\pi}{2} \le x < 0 \\ -\frac{2}{\pi}x + 3 & 0 \le x < \pi \\ 0 & \pi \le x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$a_0 = \frac{11}{8}$

$a_k = \begin{cases} \dfrac{10}{k^2\pi^2} & \text{für } k \text{ ungerade} \\ \dfrac{12}{k^2\pi^2} & \text{für } k = 2, 6, 10, \ldots \\ 0 & \text{für } k = 4, 8, 12, \ldots \end{cases}$

$b_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{k\pi} & \text{für } k \text{ gerade} \\ \dfrac{k\pi + 6}{k^2\pi^2} & \text{für } k = 1, 5, 9, \ldots \\ \dfrac{k\pi - 6}{k^2\pi^2} & \text{für } k = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$

$a_1 = \frac{10}{\pi^2}$; $a_2 = \frac{3}{\pi^2}$ $b_1 = \frac{\pi+6}{\pi^2}$; $b_2 = \frac{-1}{2\pi}$

$$s_f(x) = \frac{11}{8} + \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{10\cos((2k-1)x) + 3\cos((4k-2)x) + (k\pi - 6 \cdot (-1)^k \sin((2k-1)x)}{(2k-1)^2} - \frac{\pi \cdot \sin(2kx)}{2k} \right)$$

8a) (i) Polstellen für $b < 0$, aber Extremstellen für $b > 0$ **(ii)** $x_W = 0$ und $\pm\sqrt{b}$, wenn $b > 0$

b) nein: damit $x_E \in \mathbb{Q}$ ist, muss $b = 3q^2$, $q \in \mathbb{Q}$ gelten; dann ist aber $x_{W2,3} = \pm q \cdot \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

c) (i) $f(x) = \dfrac{27x}{(x^2 - 3)^2}$ **(ii)** $t(x) = 3x$; Schnitt bei $\pm\sqrt{6}$ jeweils unter einem Winkel von 158,8°

(iii) $p(x) = 3x - \frac{1}{4}x^3$ B(3 | 2,25) **(iv)** $\dfrac{45}{16}$ (E^2)