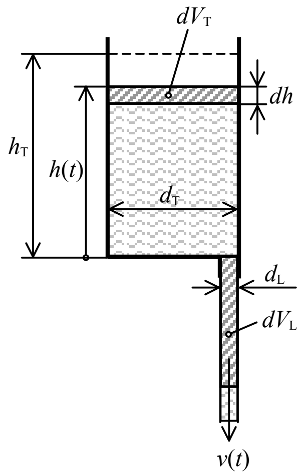
Bsp. 1. **(Differentialgleichungen, Ausgleichsrechnung)**
Aus einem zylindrischen Tank (mit dem Innendurchmesser d_T und der Flüssigkeitshöhe h_T) läuft eine ideale Flüssigkeit durch ein am Boden befindliches Abflussloch (mit dem Innendurchmesser d_L) aus. Die theoretische Ausflussgeschwindigkeit $v(t)$ ergibt sich aus der Formel:



$v(t) = k \cdot \sqrt{2g \cdot h(t)}$, $h(t)$ ist die momentane Flüssigkeitshöhe im Tank

a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Flüssigkeitshöhe $h(t)$ auf; wegen der Inkompressibilität gilt folgende Beziehung für die Volumenänderungen:

$$-\frac{dV_T}{dt} = \frac{dV_L}{dt}$$ (das negative Vorzeichen ergibt sich aus der Abnahme der Flüssigkeitshöhe im Tank!)

b) Lösen Sie die Differentialgleichung allgemein ($h(t) = \ldots$) und für die Werte: $d_T = 6{,}00\,\text{m}$, $h(0) = h_T = 5{,}00\,\text{m}$, $d_L = 0{,}10\,\text{m}$, $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

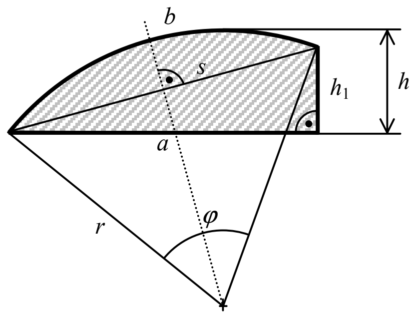
c) Zur Bestimmung der Formzahl k wird eine Messreihe ermittelt (mit den in **b)** gemachten Angaben):

$h(t)$	5,00	3,77	2,70	1,82	1,11	m
t	0	600	1200	1800	2400	s

Berechnen Sie daraus k durch Anwendung der Methode der „kleinsten Fehlerquadrate" mittels einer Ausgleichsgeraden von der Form $y = ax$ (bringen Sie dafür die Formel für die Flüssigkeitshöhe zweckmäßigerweise in die Form $\sqrt{h_T} - \sqrt{h(t)} = \ldots$).

d) Berechnen Sie mit **b)** und **c)** die (theoretische) Zeit t_a, die für die vollständige Entleerung des Flüssigkeitstanks nötig ist. Welche mittlere Leistung wird in dieser Zeit (Flüssigkeitsdichte $\rho = 1{,}02\,\text{kg}\,\text{dm}^{-3}$) durch das Auslaufen freigesetzt?

Bsp. 2. **(Geometrie, TAYLOR-Polynom, Fehlerrechnung)**
Für das nebenstehende Profil werden folgende Größen gemessen: Profilbogen b, Profilbasis a und Teilhöhe h_1.



a) Geben Sie Formeln für die Sehne s und den Bogen b in Abhängigkeit vom Radius r und dem Öffnungswinkel φ an.

b) Folgende Werte wurden gemessen: Profilbogen $b = 1{,}92\,\text{m}$, Profilbasis $a = 1{,}80\,\text{m}$ und Teilhöhe $h_1 = 0{,}25\,\text{m}$. Berechnen Sie daraus den Radius r und den Öffnungswinkel φ durch näherungsweises Lösen des Gleichungssystems von **a)**.

c) Berechnen Sie mit den Ergebnissen von **b)** die Profilhöhe h.

d) Man möchte eine Näherungsformel zur Berechnung des Radius aus den Größen a, b und h_1 herleiten. Entwickeln Sie dazu die Funktion $f(\varphi) = \sin\frac{\varphi}{2}$ an der Stelle $\varphi_0 = 0$ in ein TAYLOR-Polynom 3. Grades und beweisen Sie damit die Näherungsformel

$$r \approx \sqrt{\frac{b^3}{24\left(b - \sqrt{a^2 + h_1^2}\right)}}$$

Vergleichen Sie den Wert aus **b)** mit dem Näherungswert. Wie viel Prozent beträgt die Abweichung?

e) Fehlerabschätzung für den Fehler Δr: Benutzen Sie die Formel aus **d)** und das Fehlerfortpflanzungsgesetz von GAUSS, um den Fehler Δr zu bestimmen, wenn die Profilbasis a auf 1 cm genau, der Profilbogen b und die Teilhöhe h_1 auf jeweils 2 cm genau vermessen wurden.

Bsp. 3. **(Differentialgleichungen, Integrationsmethoden, Näherungslösungen)** Bei einem Fallschirmspringer (mit samt seinem Fallschirm hat er eine Masse von $m = 90\,\text{kg}$) öffnet sich der Fallschirm bei einer Geschwindigkeit von $v(0) = v_0 = 48\,\text{ms}^{-1}$. Dadurch ergibt sich (nach NEWTON) ein Luftwiderstand, der proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist ($F_W = k \cdot v^2$).

a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die gebremste Fallbewegung auf, wenn von einer konstanten Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ ausgegangen wird. Benutzen Sie dazu das Gesetz von NEWTON:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = \sum_k F_k$$

b) Ermitteln Sie daraus das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz $v(t)$ des Fallschirmspringers, wenn Messungen von k den Wert $k = 2{,}5\,\text{kg}\,\text{s}^2\,\text{m}^{-2} \cdot g$ für diesen Fallschirm ergaben. (Hinweis zur Verwendung der Integraltafeln: $mg < kv^2$!)

c) Welche Endgeschwindigkeit ($t \to \infty$) ist zu erwarten?

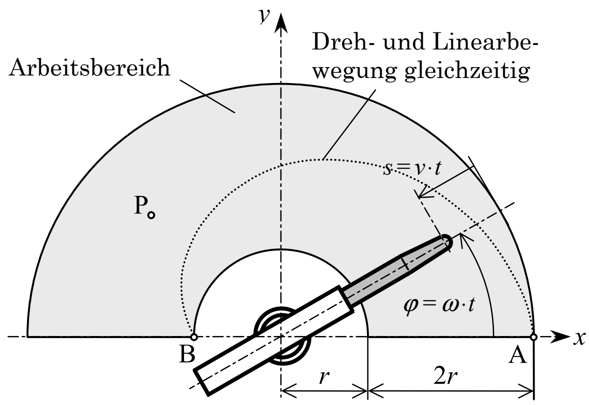
d) Bestimmen Sie die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ durch Differenzieren von $v(t)$ und daraus $a_0 = a(0)$.

e) Berechnen Sie den nach dem Öffnen zurückgelegten Weg $s(t)$ durch Integration von $v(t)$, wobei $s(0) = 0$ anzunehmen ist. (Hinweis zur Integration: Zerlegen Sie den Bruch (Division) und substituieren Sie den Nenner)

f) In welcher Entfernung von der Erdoberfläche ist die Reißleine des Fallschirms spätestens zu ziehen, wenn für die Entfaltung des Schirms eine Zeit von 1,5 s angenommen wird (in der sich der Springer mit konstanter Geschwindigkeit v_0 bewegen soll) und die Aufprallgeschwindigkeit höchstens 102% der Endgeschwindigkeit betragen darf?

g) Wie lange dauert das Herabschweben, wenn in 2,5 km Höhe die Bremswirkung des Fallschirms einsetzen soll?

Bsp. 4. **(Geometrie, Kurven in Parameterform, geometrische Wahrscheinlichkeit)** Der Arm eines Punktschweißroboters ist drehbar um eine senkrechte Achse, durch eine horizontale Teleskopbewegung des Arms ist eine radiale Bewegung der Elektrode möglich. Für die Positionierung von A zu einem beliebigen Punkt P des Arbeitsbereichs sei die Radialgeschwindigkeit v konstant angenommen.



a) Die maximale Radialgeschwindigkeit v_m ist so gewählt, dass bei gleichzeitiger Drehung mit maximaler Winkelgeschwindigkeit ω_m die Elektrode von A nach B gelangt. Welcher Zusammenhang ergibt sich für v_m und ω_m ? Ermitteln Sie die Parameterform der Kurve AB (der Parameter ist die Zeit t).

b) Welche Punkte des Arbeitsbereichs könnte man auf einer Geraden von A aus erreichen, welche nicht? Geben Sie die Gleichung und die Länge der längsten Strecke an. Das Wievielfache der Minimalzeit benötigt man gegenüber der Bewegung mit maximaler Drehgeschwindigkeit, um von A entlang der längsten Strecke zum äußeren Randpunkt zu gelangen?

c) Jeder Punkt des Arbeitsbereichs kann entweder mit maximaler Winkelgeschwindigkeit oder mit maximaler Radialgeschwindigkeit angesteuert werden, je nachdem wo er sich befindet (die in **a)** ermittelte Kurve AB trennt die Bereiche). Wie wahrscheinlich ist es, dass die Drehung diese Zeit vorgibt?

Lösungen:

1a) $-\frac{d_T^2\pi}{4}\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{d_L^2\pi}{4}\cdot k\cdot\sqrt{2gh}$; $h(0)=h_T$

b) $h(t)=\left(\sqrt{h_T}-k\cdot\frac{d_L^2}{d_T^2}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}}\cdot t\right)^2$ bzw. $h(t)\approx 5\text{m}\cdot(1-2{,}751\cdot 10^{-4}\,\text{s}^{-1}\cdot kt)^2$

c) $k\approx 0{,}801$

d) Es werden ca. $779\,\text{W}$ in ungefähr 75,6 Minuten geleistet

2a) $s=2r\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$; $b=r\cdot\widehat{\varphi}$

b) $r\approx 1{,}68\,\text{m}$; $\varphi\approx 65{,}5°$

c) $h\approx 0{,}41\,\text{m}$

d) $\sin\frac{\varphi}{2}\approx\frac{\varphi}{2}-\frac{\varphi^3}{48}$ $\rightarrow$ $\sqrt{a^2+h_1^2}\approx b-\frac{b^3}{24r^2}$ und damit $r\approx 1{,}69\,\text{m}$; der Unterschied beträgt $\approx +0{,}8\%$

e) $\Delta r\approx 16\,\text{cm}$! Man sollte versuchen, durch Messen anderer Größen eine bessere Genauigkeit zu erzielen.

3a) $m\cdot\frac{dv}{dt}=m\cdot g-k\cdot v^2$

b) (Trennung der Variablen) $v=6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{9+7e^{-t\cdot 3{,}27s^{-1}}}{9-7e^{-t\cdot 3{,}27s^{-1}}}$

c) $v_\infty=6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

d) $a(t)=-252g\cdot\frac{e^{-t\cdot 3{,}27s^{-1}}}{(9-7e^{-t\cdot 3{,}27s^{-1}})^2}$; $a_0=-63g$!

e) $s(t)=6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\left(t+\frac{1\text{s}}{1{,}635}\cdot\ln(4{,}5-3{,}5e^{-t\cdot 3{,}27s^{-1}})\right)$

f) $\approx 85{,}5\,\text{m}$

g) $\approx 416\,\text{s}$

4a) $v_m=\frac{2r}{\pi}\cdot\omega_m$; $x(t)=(3r-v_m t)\cdot\cos(\omega_m t)$, $y(t)=(3r-v_m t)\cdot\sin(\omega_m t)$

b) Alle Punkte „oberhalb“ der Tangente an den inneren Kreis und rechts vom Berührpunkt auch unterhalb.
Tangentengleichung: $t(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}(3r-x)$ für $x\in[-\frac{7}{3}r;3r]$; $l=4r\cdot\sqrt{2}$; ≈2,55-fache Zeit

c) $\frac{7}{12}$ (die Flächenformel $\int_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot\dot{x}(t)\cdot dt$ verwenden)